Germ Fieldを知ったときのPredictor Operator (多重マルコフ性と予測理論への応用)

岡部, 靖憲

数理解析研究所講究録
151巻 1972年 23-46

Germ field を知ったときの Predictor Operator

阪大 理　岡部靖憲

§1. 序

Levinson-McKean [1] において、マルコフ性をもつ、正規定常過程のスペクトル密度による特徴付けがなされたことは、すでに、いくつかの数理研シンポジウム([2]) において紹介したので、今回は、前半において、Dym-McKean [3], Dym [4] の紹介をし、後半において、Okabe [5] の一部の紹介をする。Prediction の観点からいうと、Dym-McKean において、"有限時間を知ったときの prediction" は "無限小時間 (germ field) を知ったときの prediction" に帰着され、Okabe において、ある条件をみたす場合に、"germ field を知ったときの predictor operator" を導入することによって、上記の問題をとく。Inverse problem の観点からいうと、Dym-McKean において、スペクトル密度から、$(0,\infty)$ 上の正の二つの測度 Q_+, Q_- と、指数型の整函数の作る二つの系 $\{A_t(z); t\geq 0\}$, $\{B_t(z); t\geq 0\}$ を見つけ出し、これらの間に、

$$(1.1)\quad \begin{cases} D_t^- A_t(z) = -z\, B_t(z) \\ D_t^+ B_t(z) = z\, A_t(z). \end{cases}$$

$$(1.2)\qquad A_0,\ B_0 : \text{minimal exponential type}$$

の関係があることを示している．そこで、(1.1)における D_t^-, D_t^+ は、それぞれ，測度 Q^-, Q^+ に関する微分である。
逆に、Dym において、 Q^-, Q^+ を先に与え、ある条件をみたす $A_0(z)$, $B_0(z)$ も同時に与えたとき、spectral function を見つけ出している。ただ、[3]における spectral 密度は L^1 の元であるが、[4]において見つけ出される spectral function は $L^1(\mathbb{R}; \frac{1}{1+t^2})$ の元であることを注意しておく。

[3], [4]における新たな道具は、de Branges space である．これは、整函数のつくる空間で再生核をもつ Hilbert 空間である。この空間の基本的な性質を用いて、cosine, (cos tz) sine (sin tz) の一般化として、$A_t(z)$, $B_t(z)$ を考え、Fourier 変換の一般化として、eigendifferential 変換を導入して、"有限時間を知ったときの prediction" を求める公式を得ている．しかし、初めに述べた様に、"germ field を知ったときの prediction" をもとめる公式に帰着されただけである。彼らの研究において、新たに起こった問題として、Q^+, Q^- という測度の確率論的意味付けを与えることは、興味がある．一次元拡散過程の dm, ds の様に。ただ、マルコフ性をもつ正規定常過程の場合は、Q^+, Q^- は夫々、Lebesgue 測度の定

数倍になることを注意しておく。

ここで紹介される[5]の一部は、初めに述べた様に、"germ fieldを知ったときのpredictor"を求める公式を与えるところである。それを求めるには、局所で実解析的な函数の作る空間の汎函数が不可避に登場するので、hyperfunctionの有効性の一端が示される。

なお、この公式の応用として、有限重マルコフ性をもつ場合には、表現核の興味ある性質が導け、又、無限重マルコフ性をもつ場合には、ある条件の下で、その正規定常過程を特徴付ける量として、無限次元拡散過程の生成作用素が見つけ出される。詳しいことは[5]を見ていただきたい。

§2. Fourier変換、Paley-Wienerの定理のde Branges spaceによる表現

各$t>0$に対して、$E_t \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$を、

$$E_t(z) = e^{-itz} \tag{2.1}$$

によって定義するとき、明らかに、

$$\left\{\begin{array}{l} |E_t| > |E_t^{\#}| \quad \text{on } \mathbb{C}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}, \\ E_t^{\#} = E_t(-\cdot), \\ E_t(0) = 1, \\ E_t \ \text{root-free on } \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

が成り立つ。但し、$\mathbb{C}$ 上の函数 f に対して、$f^\#$ は、
$f^\#(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$ によって定義される。

次に、de Branges space の一例である $\mathbb{B}(E_t)$ を、

(2.3) $$\mathbb{B}(E_t)=\Big\{\varphi\in\mathcal{O}(\mathbb{C});\quad \|\varphi\|^2_{E_t}\equiv\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\varphi}{E_t}\Big|^2<\infty,$$
$$|\varphi(z)|^2\le\|\varphi\|^2_{E_t}\,\frac{|E_t(z)|^2-|E_t^\#(z)|^2}{4\pi y},\quad z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Big\}$$

で定義するとき、(2.2)によって、$\mathbb{B}(E_t)$ は次の性質をもつ；

(2.4) $\mathbb{B}(E_t)$は再生核をもつ Hilbert space

(2.5) $\mathbb{B}(E_t)=\{\hat{f};\ f\in L^2(\mathbb{R}),\ \mathrm{spt}\, f\subset[-t,t]\}$.

(2.5)が、L^2 に関する Paley-Wiener の定理をいい表わしている。又、(2.5)によって、次も成り立つ；

(2.6) $\mathbb{B}(E_s) \underset{(\text{isometrically})}{\hookrightarrow} \mathbb{B}(E_t) \underset{(\text{''})}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}),\qquad s<t.$

(2.7) $\bigcup_{t>0}\mathbb{B}(E_t)$ dense in $L^2(\mathbb{R})$.

次に、$A_t,\ B_t$ を、

(2.8) $$\begin{cases} A_t \equiv 2^{-1}(E_t+E_t^\#) = \cos tz \\ B_t \equiv (2i)^{-1}(E_t^\# - E_t) = \sin tz \end{cases}$$

で定義し、$(0,\infty)$ 上の測度 Q^+, Q^- を

(2.9) $dQ^+ = dQ^- = dt$

で定義する。

L^2 を　$L^2 = (L^2)_{even} \oplus (L^2)_{odd}$　と分解し、
L^2 上の Fourier 変換を　$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \oplus \mathcal{F}_o$　と分解する,
即ち

$$(2.10)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_e f = (\hat{f})_{even} & \text{for } f \in (L^2)_{even}, \\ \mathcal{F}_o f = (\hat{f})_{odd} & \text{for } f \in (L^2)_{odd}. \end{cases}$$

このとき、次のことが成りたつ;

(2.11)　$\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_o$ は、それぞれ、$(L^2)_{even}$, $(L^2)_{odd}$ から、$L^2((0,\infty); Q^+)$, $L^2((0,\infty); Q^-)$ 上への bijective であり、

$$(2.12)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_e f = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} A_t(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \\ \mathcal{F}_o f = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} B_t(\lambda) f(\lambda) d\lambda \end{cases}$$

$$(2.13)\quad \begin{cases} f(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} A_t(\lambda) \mathcal{F}_e f(t) dQ^+(t), & f \in (L^2)_{even}, \\ f(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} B_t(\lambda) \mathcal{F}_o f(t) dQ^-(t), & f \in (L^2)_{odd} \end{cases}$$

$$(2.14)\quad \begin{cases} \|\mathcal{F}_e f\|_{Q^+} = \sqrt{\pi}\, \|f\|_{L^2}, \\ \|\mathcal{F}_o f\|_{Q^-} = \sqrt{\pi}\, \|f\|_{L^2}. \end{cases}$$

さらに、Paley-Wiener の定理 (2.5) は次のことを意味している;

(2.15)　$f \in (L^2)_{even}$, $g \in (L^2)_{odd}$ の夫々 $\mathcal{B}(E_t)$ への projection は、$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{t} A_s(\lambda) \mathcal{F}_e f(s) dQ^+(s)$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{t} B_s(\lambda) \mathcal{F}_o g(s) dQ^-(s)$ で与えられる。

さらに又、(2.8), (2.9) より、

$$(2.10)\quad \begin{cases} D_t^- A_t(z) = -z\, B_t(z) \\ D_t^+ B_t(z) = \ \ z\, A_t(z) \end{cases}$$

$$(2.11)\qquad A_0 = 1, \qquad B_0 = 0$$

が成り立つ。

$L^2(\mathbb{R})$ は、定数函数 1 を weight にもつ L^2-space とみれることに注意して、Dym-McKean, Dym の研究は、次の (*) をみたす Δ を weight にもつ L^2-space を考えて、A_t, B_t, Q_t^+, Q^- に相当する量を取り出し、上記したこと、(2.3), (2.4), (2.6), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.10)、を示していると解釈することができる。

$$(*)\qquad \Delta : \geq 0,\ \text{even},\ \in L^1,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\lg \Delta}{1+t^2} > -\infty$$

以下に詳しくみてみる。

§3. Dym-McKean の研究.

(*) をみたす Δ が与えられたとする。$\mathbb{Z}_\Delta$ を $L^2(\mathbb{R};\Delta)$, $\mathbb{Z}_\Delta^t$ $(t \geq 0)$ を、

$$(3.1)\qquad \mathbb{Z}_\Delta^t = \bigcap_{\varepsilon>0} \left[e^{i\tau s\cdot};\ |s| \leq t+\varepsilon \right],$$

で定義する。

次に、Δ の outer function $h(z)$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ を、

$$(3.2)\quad h(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{1+tz}{t-z}\,\frac{\lg\Delta(t)}{1+t^2}dt\right\}\ (z\in\mathbb{C}^+)$$

と定義するとき、$h(z)$ は、

$$(3.3)\quad \sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}}|h(x+iy)|^2dx<\infty$$

をみたす $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ の元であるので、Hille-Tamarkin の定理（Paley-Wiener の定理）によって、$\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,h(x+i\varepsilon)\equiv h(x)$ が存在して、

$$(3.4)\quad |h(t)|^2=\Delta(t),\qquad \overline{h(t)}=h(-t)$$

が成り立つ。

次に、weight Δ^+ を $\Delta^+=\dfrac{\Delta}{\pi(1+t^2)}$ によって導入する。そして、各 $t\geq 0$ に対して、$e_t\in\mathbb{Z}^t_{\Delta^+}$ を

$$(3.5)\quad e_t=\left(P_{\mathbb{Z}^t_{\Delta^+}}\frac{1}{e^{2it\cdot}h}\right)\Big/\left\|P_{\mathbb{Z}^t_{\Delta^+}}\frac{1}{e^{2it\cdot}h}\right\|_{\Delta^+}$$

によって定義する。このとき、

$$(3.6)\quad e_t(0)\in\mathbb{R}-\{0\}$$

であることに注意して、$E_t\in\mathbb{Z}^t_{\Delta^+}$ を、

$$(3.7)\quad E_t=(2e_t(0))^{-1}(e_t+e_t^{\#})+2^{-1}e_t(0)(e_t-e_t^{\#})$$

によって定義するとき、 E_t は次の性質をもつ;

$$
(3.8)\quad \begin{cases} E_t \text{ は entire function であり、} \\ |E_t| > |E_t^{\#}| \text{ on } \mathbb{C}^+, \\ E_t^{\#} = E_t(-\cdot), \\ E_t(0)=1, \\ E_t \quad \text{root-fue on } \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}, \\ E_t \text{ は 正確に、指数型は } t \text{ であり、} \\ E_t^{-1} \in L^2 \qquad\qquad (t \geq 0) \end{cases}
$$

この E_t を用いて、 $A_t, B_t \in \mathbb{Z}^t_{\Delta^+}$

を、

$$
(3.9)\quad \begin{cases} A_t = 2^{-1}(E_t + E_t^{\#}) \\ B_t = (2i)^{-1}(E_t^{\#} - E_t) \end{cases}
$$

で定義する。

これは、(2.2), (2.8) に対応している。

この E_t を用いて、 (2.3) によって、 $\mathcal{B}_t \equiv \mathbb{B}(E_t)$ を構成するとき、

$$
(3.10)\quad \mathcal{B}_t = \mathbb{Z}^t_{\Delta}
$$

が成り立つ。

次に、測度 Q^+, Q^- を導入するために、次の仮定を設ける;

$\boxed{\text{仮定}}$: $\mathbb{Z}_\Delta^t = [e^{\tau s\cdot}\,;\ |s| \leq t]$ $(t>0)$

この仮定は、Δ が rational function のとき、あるいは、minimal exponential type の entire function の逆数のときには成り立つ。この仮定の下で、Δ^+ についても同じ事がいえることを注意しておく。

このとき、$(0,\infty)$ 上の正の測度 Q^+, Q^- を

$$(3.11)\quad \begin{cases} Q^+((s,t]) = \pi^{-1} \| \gamma^{-1}(A_t(\gamma) - A_s(\gamma)) \|_\Delta^2, \\ Q^-((s,t]) = \pi^{-1} \| \gamma^{-1}(B_t(\gamma) - B_s(\gamma)) \|_\Delta^2, \quad 0 \leq s < t \end{cases}$$

によって定義する。(3.9) で定義された A_t, B_t は次の方程式を満たす;

$$(3.12)\quad \begin{cases} D_t^- A_t^{(z)} = -z\, B_t(z) \\ D_t^+ B_t^{(z)} = z\, A_t(z) \end{cases}$$

これは、(2.10) に対応している。

(2.6),(2.7) と異なって、今度の $\mathcal{B}_t$ に対しては、

$$(3.13)\quad \mathcal{B}_{\bullet s} \underset{(\text{isometrically})}{\hookrightarrow} \mathcal{B}_{\bullet t} \underset{(\;''\;)}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0, \quad s<t$$

$$(3.14)\quad \bigcup_{t>0} \mathcal{B}_t \ \text{ dense in } \mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0$$

が成り立つことを注意しておく。即ち、今度のときは、$L^2(R)$ の代りに、$\mathbb{Z}_\Delta$ をとることができなくて、商空間

$\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0$ をとらなければいえない。このことが、序文でも述べた様に、"$\mathbb{Z}_\Delta^0$ を知ったときの prediction" を求める公式が Dym–McKean [3] では求まっていないことに反映する。もちろん、$\mathbb{Z}_\Delta^0$ の再生核は存在するが、その explicit な形が分らないのでは意味がないのである。

今迄の準備によって、Fourier 変換の一般化にあたるものとして、eigendifferential 変換を導入する。(2.10), (2.12) に対応して、$\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_o$ を次の様に定義する；

$$
(3.15)\quad
\begin{cases}
\mathcal{F}_e :\ \left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{even} \longrightarrow L^2((0,\infty);Q^+) \\
\qquad\quad \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$}\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} \\
\qquad\quad f \longrightarrow \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} A_t(\gamma) f(\gamma)\Delta(\gamma)d\gamma , \\
\mathcal{F}_o :\ \left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{odd} \longrightarrow L^2((0,\infty);Q^-) \\
\qquad\quad \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$}\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} \\
\qquad\quad f \longrightarrow \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} B_t(\gamma) f(\gamma)\Delta(\gamma)d\gamma
\end{cases}
$$

このとき、次のことが成り立つ；

(3.16) $\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_o$ は、それぞれ, $\left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{even}$, $\left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{odd}$ から、$L^2((0,\infty);Q^+)$, $L^2((0,\infty);Q^-)$ 上への bijective であり、

$$
(3.17)\quad
\begin{cases}
f(\lambda) = \pi^{-1}\displaystyle\int_0^\infty A_t(\gamma)\,\mathcal{F}_e f(t)\,dQ^+(t), & f\in\left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{even}, \\
f(\lambda) = \pi^{-1}\displaystyle\int_0^\infty B_t(\gamma)\,\mathcal{F}_o f(t)\,dQ^-(t), & f\in\left(\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{odd},
\end{cases}
$$

$$(3.18)\quad \begin{cases} \|\mathcal{F}_e f\|_{Q^+} = \sqrt{\pi}\,\|f\|_\Delta, \\ \|\mathcal{F}_o f\|_{Q^-} = \sqrt{\pi}\,\|f\|_\Delta \end{cases}.$$

(3.16), (3.17), (3.18) は、それぞれ、(2.11), (2.13), (2.14) に対応している。さらに、(2.15) に対応するものとして、次の (3.19) が成り立つ；

$$(3.19)\quad f \in \left(\mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{even},\quad g \in \left(\mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0\right)_{odd} \text{ の}$$

$\mathcal{B}_t$ への projection は、それぞれ、$\pi^{-1}\int_0^t A_s(\lambda)\mathcal{F}_e f(s)\,dQ^+(s)$, $\pi^{-1}\int_0^t B_s(\lambda)\mathcal{F}_o g(s)\,dQ^-(s)$ で与えられる。

この $\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_o$ が eigendifferential 変換と呼ばれる。名前の由来は、おそらく、(3.12) によって、

$$(3.20)\quad \begin{cases} D^+D^-A_t = -z^2 A_t(z) \\ D^-D^+B_t = -z^2 B_t(z) \end{cases}$$

が成り立つので、D^+D^-, D^-D^+ の eigenfunction である $A_t(z)$, $B_t(z)$ を用いて、(3.15) において、$\mathcal{F}_e$, $\mathcal{F}_o$ が定義されているからだと思われる。

今迄の結果を用いて、prediction の問題を考察する。通常の prediction は、

$$(3.21)\quad P_{\mathbb{Z}_\Delta^-}\, e^{izt} \quad (t>0) \text{ を求めること、}$$

即ち、過去($\mathbb{Z}_\Delta^- = [e^{\tau t}; \ t<0]$)全部を知ったときの prediction であるが、ここでは、過去の一部を知ったときの prediction を考える。これは、$\mathbb{Z}_\Delta^{(-T,0)}$ を

$$(3.22) \qquad \mathbb{Z}_\Delta^{(-T,0)} = [e^{\tau t}; \ -T<t<0] \quad (T>0)$$

によって定義するとき、問題は、

$$(3.23) \qquad P_{\mathbb{Z}_\Delta^{(-T,0)}} e^{\tau t} \quad (t>0) \quad \text{を求めること}$$

といえる。

$$P_{\mathbb{Z}_\Delta^{(-T,0)}} e^{\tau t} = e^{-\tau\frac{T}{2}} \cdot P_{\mathbb{Z}_\Delta^{\frac{T}{2}}} e^{\tau(t+\frac{T}{2})}$$

であるから、任意の $t>0$, $T>0$ に対して、$P_{\mathbb{Z}_\Delta^T} e^{\tau(t+T)}$

を求めれば充分である。実は、任意の $f \in \mathbb{Z}_\Delta$ に対して、次のことが成り立つ;

$$(3.24) \quad P_{\mathbb{Z}_\Delta^T} f = P_{\mathbb{Z}_\Delta^0} f +$$

$$+ \ \pi^{-1} \int_0^T A_t(\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}} A_t(r) \hat{f}(r) \Delta(r) dr \right) dQ^+(t) \ +$$

$$+ \ \pi^{-1} \int_0^T B_t(\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}} B_t(r) \hat{f}(r) \Delta(r) dr \right) dQ^-(t) \ .$$

この (3.24) からも分る様に、$P_{\mathbb{Z}^T_\Delta}$ を求めることは $P_{\mathbb{Z}^0_\Delta}$ を求めることに帰着された。Dym-McKean [3] では、このことはできていない。しかし $P_{\mathbb{Z}^0_\Delta}$ が求まらなくても、predictor error の explicit な表示と興味ある関係式が成り立つ。それを説明する。Predictor error を、

$$
(3.25)\quad
\begin{cases}
D^+(a,\ell) = \| f_{even} - P_{\mathbb{Z}^a_\Delta} f_{even} \|_\Delta^2 , \\
D^-(a,\ell) = \| f_{odd} - P_{\mathbb{Z}^a_\Delta} f_{odd} \|_\Delta^2 , \\
D(a,\ell) = D^+(a,\ell) + D^-(a,\ell), \quad 0<a<\ell,
\end{cases}
$$

で定義する。但し、そこで f は $f=e^{\gamma t \cdot}$ である。このとき、(3.16), (3.17), (3.18), (3.19) によって、次のことが成り立つ；

$$
(3.26)\quad
\begin{cases}
D^+(a,\ell) = \pi^{-1} \int_a^\ell \mathcal{F}_e f(t)^2 \, dQ^+(t), \\
D^-(a,\ell) = \pi^{-1} \int_a^\ell \mathcal{F}_o f(t)^2 \, dQ^-(t)
\end{cases}
$$

さらに、D^+, D^-, D の間には、次の関係式が成り立つ； もし $\int \gamma^6 \Delta < \infty$ ならば、

$$
(3.27)\quad \frac{\partial^2 D^+(a,\ell)}{\partial Q^-(a)\,\partial Q^+(a)} + \frac{\partial^2 D^-(a,\ell)}{\partial Q^+(a)\,\partial Q^-(a)} = \frac{\partial^2 D(a,\ell)}{\partial \ell^2}
$$

$$0<a<\ell$$

注意　Δ^{-1} が minimal exponential type の entire function のときには、(3.29) は、付帯条件 $\int \gamma^6 \Delta < \infty$ なしで、distribution の意味で成り立つ。このときには、Q^+, Q^- は それぞれ、Lebesgue measure の定数倍であることは、すでに注意しておいた。

注意　$P_{\mathbb{Z}^\circ_\Delta}$ の explicit な表現は、ある条件の下で、§5で述べられる。

§4　Dym の研究

Dym [4] では、Dym-McKean [3] の研究の逆のこと、即ち A_0, B_0, Q^+, Q^- を与えて、Δ を求めることを行っている。条件を少し一般にしているため、一般には、Δ は measure として現われ、density の存在には、かなり判定しにくい (一般的に) 条件が必要である。

まず、$\{A_0(z), B_0(z)\}$ を次の (4.1), (4.2) をみたすものとし、これが与えられたとする;

(4.1)
$$\begin{cases} A_0, B_0 : \text{minimal exponential type の整函数} \\ A_0 \text{ even}, \quad B_0 \text{ odd} \\ A_0^{\#} = A_0, \quad B_0^{\#} = B_0, \quad A_0(0) = 1 \end{cases}$$

(4.2)　E_0 を $E_0 = A_0 - iB_0$ とおくとき、

$$\begin{cases} |E_0| > |E_0^{\#}| & \text{on } \mathbb{C}^+ \\ \dfrac{1}{(1+\tau^2)|E_0|^2} \in L^1 \end{cases}$$

(42)の最後の積分条件が、(38)の最後のそれより一般になっていることに注意する。

さらに、$(0,\infty)$ 上の strictly increasing で連続な函数 Q^+, Q^- を与える。

これらの、$\{A_0(z), B_0(z), Q^+, Q^-\}$ から、どの様にして、spectral function が求まるかを、段を追ってみていく。大体、[4] で証明されている順である。

(1段). 初期条件 A_0, B_0 をもつ微分方程式

(43) $$\begin{cases} D_t^- A_t(z) = -z B_t(z) \\ D_t^+ B_t(z) = z A_t(z) \end{cases}$$

を満足する解 $(A_t, B_t)_{t\geq 0}$ が一意的に定まる。

(2段) この A_t, B_t を用いて、E_t を

(44) $$E_t(z) = A_t(z) - i B_t(z)$$

によって定義するとき、E_t は次の性質をもっている;

$$
(4.5)\quad
\begin{cases}
E_t \text{ は exponential type の整函数であり、} \\
|E_t| > |E_t^{\#}| \quad \text{on } \mathbb{C}^+ \\
E_t^{\#} = E_t(-\cdot) \\
E_t(0) = 1 \\
E_t \quad \text{root-free on } \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}, \\
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\gamma^2)|E_t|^2} < \infty \\
\int_{\mathbb{R}} \frac{\lg^+ |E_t(\gamma)|}{1+\gamma^2} < \infty \qquad (t>0)
\end{cases}
$$

(4.5)の最後から、2番目の積分条件が難しい。この(4.5)は、$t=0$ のときにあたる(4.2)が、各 $t>0$ に対しても成り立つことを意味している。

<u>(3段)</u> この E_t を基礎にして、(2.3)と同じく、$\mathcal{B}_t = \mathbb{B}(E_t)$ を定義する。この空間が、E_t を base とする de Branges space と呼ばれているものである。そして、次のことが示される;

$$
(4.6) \qquad \mathcal{B}_s \underset{(\text{isometrically})}{\hookrightarrow} \mathcal{B}_t \qquad s<t
$$

これは、(3.13)の最初の包含関係に対応している。

(4段)　(3.11)に対応する式が証明される。

(5段)　次に、spectral measureの存在をいう。
そのために、

$$(4.7)\quad \sigma_t(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{(1+\gamma^2)|E_t(\gamma)|^2}\,d\gamma \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ t \geq 1)$$

を定義する。　λに関して単調増加な函数σ_tは、
(4.6)と、de Branges spaceの基本的な性質を用いて、
tに関して一様有界であることが示されるので、適当な
部分列 $t_j \nearrow \infty$ が存在して、

$$(4.8)\qquad \sigma_{t_j} \xrightarrow[(j\to\infty)]{} \sigma \quad \text{weakly}.$$

そこで、　measure μ を

$$(4.9)\qquad d\mu = (1+\gamma^2)\,d\sigma$$

で定義する.　このμは、

$$(4.10)\qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+\gamma^2} < \infty$$

をみたすことは明らか。　このμが、求めるspectral
measureにあたることを、以下の順を追って示す。

(6段).　まず、

$$(4.11)\qquad \mathcal{B}_t \underset{(\text{isometrically})}{\hookrightarrow} L^2(d\mu),$$

$$(4.12) \qquad \mathcal{B}_t \subset L^2(d\mu)/\mathcal{B}_0$$

が示される。

<u>(7段)</u>　(4.8)からして、一般には、σ, 従って、μは一意に定まらないが、定まる条件が次の様にして与えられる; measure Qを $Q^+ + Q^-$とし、g^+, g^-をそれぞれ、Q^+, Q^-のQに関するdensityとし、増加函数 $\tau(t)$を

$$(4.13) \qquad \tau(t) = \int_0^t \sqrt{g^+(s) g^-(s)}\, dQ(s)$$

で定義する。このとき、

(4.14)　$\tau(\infty)=\infty \Rightarrow \mu$は、定数倍を除いて一意に定まる。

<u>注意</u>　(4.5)において、各 E_t $(t \geq 0)$ は、指数型とだけいったが、実は、指数型 $\tau(t)$ になっていることが示される。

<u>(8段)</u>　(3.14)に相当するものとして、

$$\tau(\infty)=\infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigcup_{t>0} \mathcal{B}_t \text{ dense in } L^2(d\mu)/\mathcal{B}_0$$

が示される。

<u>(9段)</u> 最後に μ が spectral measure であることを示す。それをいうことは、次の(4.15)〜(4.18)を示せばよい。 $\tau(\infty)=\infty$ と仮定する。(3.15)の $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_o$ の逆変換に当るものとして、T_e, T_o を次の様に定義する;

$$(4.15)\quad \begin{cases} T_e : L^2((0,\infty);Q^+) \longrightarrow \left(L^2(d\mu)/B_0\right)_{even} \\ \qquad\quad g \longmapsto \pi^{-1}\displaystyle\int_0^\infty A_s(\lambda)g(s)\,dQ^+(s), \\ T_o : L^2((0,\infty);Q^-) \longrightarrow \left(L^2(d\mu)/B_0\right)_{odd} \\ \qquad\quad g \longmapsto \pi^{-1}\displaystyle\int_0^\infty B_s(\lambda)g(s)\,dQ^-(s) \end{cases}$$

このとき、 T_e, T_o は次のことをみたす;

(4.16) T_e, T_o は bijective であり、

$$(4.17)\quad \begin{cases} T_e^{-1}f = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} A_s(r)f(r)\,d\mu(r), \\ T_o^{-1}f = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \displaystyle\int_{-n}^{n} B_s(r)f(r)\,d\mu(r), \end{cases}$$

$$(4.18)\quad \begin{cases} \|g\|_{Q^+} = \sqrt{\pi}\,\|T_e g\|_\mu, \\ \|g\|_{Q^-} = \sqrt{\pi}\,\|T_o g\|_\mu . \end{cases}$$

(4.15), (4.16), (4.17), (4.18) はそれぞれ、(3.17), (3.16), (3.15), (3.18) に対応している。

Dym [4] では、まず、$D^+D^-u = -\beta^2 u$ の解 $u(t,\beta)$ で、A_t と独立で、β について $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ の元であり、

$$(4.19) \quad A_s(\beta)u(t,\beta) = W(\beta)\int_{\mathbb{R}} \frac{A_s(\gamma)A_t(\gamma)}{\pi(\gamma^2-\beta^2)}\, d\mu(\gamma)$$

ここで、$W(\beta)$ は A_t, u の Wronskian
を満たすものを求めて、それから、

$$(4.20) \quad R_t(\beta) = \frac{A_t(\beta)u(t,\beta)}{W(\beta)} \quad (t \geq 0,\ \beta \in \mathbb{C}^+)$$

で定義される R_t が、次の条件☆:

☆ $\beta R_s(\beta)$ が $\beta = \underset{\mathbb{R}}{c}$ の近傍で、連続に拡張される.

をみたすならば、μ は c で可微分で、その density $\Delta(c)$ は、

$$(4.21) \quad \Delta(c) = \frac{c\left(u^-(t,c)\overline{u(t,c)} - u(t,c)\overline{u^-(t,c)}\right)}{2i\,|W(c)|^2}$$

で与えられることが示されている。

§5. germ field を知ったときの predictor operator.

6頁の(*)をみたす△を spectral density にもつ正規定常過程を $\mathbb{X}$ とする。
$\mathbb{F}^-$ を $X(t)$ $(t<0)$ で張られる最小の σ-field とするとき、$\mathbb{X}$ がマルコフ性をもつとは、

$$(5\text{-}1) \quad E(X(t)\,|\,\mathbb{F}^-) : \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X(t);\ |t|<\varepsilon)\text{-measurable}, \quad \forall t>0$$

が成り立つことをいう。

我々は、序文、§3 で述べた様に、$P_{\mathbb{Z}^0_\triangle}$ を求める訳であるから、$\mathbb{Z}^0_\triangle$ の構造を調べることだが、$\mathbb{X}$ がマルコフ性をもっていると仮定しても、面白さは、少しも失わないと思う。とすると、([1], [5]) より (3.2) で定義される h は

$$(5.2) \quad h^{-1}(t) = P(t), \quad P \ \text{minimal exponential type の entire function}$$

を満足する。

さらに、我々は、h の Fourier 変換で与えられる表現核 E が、次の条件 (#) をみたして

いるとする：

$$\boxed{\#}\quad E \in C^{\omega}(\mathbb{R}-\{0\})$$

このとき、 $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{O}(\{0\})$ に対して、

$$(5.3)\quad P(z,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k+1}\,\varphi^{(k)}(0)\right)(-iz)^{n}$$

によって、 $P(z,\varphi)$ を 定義するとき、 この $P(z,\varphi)$ は、

$$(5.4)\quad \begin{cases} P(z,\varphi) : & z \text{ について minimal exponential type の entire function,} \\ P(z,\varphi) : & \varphi \text{ について } \mathcal{O}(\{0\})' \text{ の元} \end{cases}$$

を満足する。

∴ この $P(z,\varphi)$ が、求める "germ field を知ったときの predictor operator" であることを 示しているのは、次の (5.5) が成り立つからである。

$$(5.5)\quad \left(P_{\mathbb{Z}^{\circ}_{\Delta}}\, e^{it\cdot}\right)(z) = P(z,\ E(t-\cdot)) \qquad t>0.$$

\# によって、 $E(t-\cdot) \in C^{\omega}((-\infty,t))$ であるから、 (5.5)の右辺は well-defined である。

この(5.5)と同等である次の公式を書いて、この報告を終わることにする;

$\boxed{\text{公式}}$ 任意の $s<0<t$ に対して、

$$E(t-s)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E^{(n)}(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k+1}(-1)^k E^{(k)}(-s)\right),$$

そこで、$(C_n)_0^{\infty}$ は、$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(-iz)^n$ の係数.

以上.

文献

[1] N. Levinson – H.P. McKean, Jr., Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise. Acta Math., 112 (1964), 99–143.

[2] 岡部靖憲, 正規定常過程のマルコフ性と佐藤の超函数, 1981年3月, 数理研シンポジウム

[3] H. Dym – H.P. McKean, Jr., Application of de Branges spaces of integral functions to the prediction of stationary Gaussian processes. Ill. J. Math. 14 (1970), 299–343

[4] H. Dym, An introduction to de Branges spaces of entire functions with application to differential equations of the Sturm-Liouville type. Adv. Math., 5 (1971), 395-471

[5] Y. Okabe, On the Gaussian process with Markovian property and the hyperfunctions of M. Sato, to appear